EAMAC - 2014 - SUJET M-C-8

Exercice 1 : 5 points

Soit f une fonction définie sur $\Re$ Soit $x_0 \in \Re$.

1) Donner la définition de dérivabilité en x_0 pour la fonction f.

2) On suppose que f est 3 fois dérivable sur $\Re$. Ecrire la formule de Taylor-Young à l' ordre 3 près de x_0

Exercice 2 : 3 points

Soit $f : \Re \to \Re$ définie par f(0)=0 et $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si x $x \neq 0$.

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Exercice 3 : 5 points

1. Soit A $\in$ M_n (K) une matrice telle que $A^k = 0$ pour un entier k. Montrer que $I_n = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$.

2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $A^3 = 0$. Calculer l'inverse de la matrice $B = I_3 - A$.

Exercice 4 : 7 points

Soit A et B des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1 – (A Δ B=A $\cap$ B) $\Leftrightarrow$ (A = B = $\emptyset$).

2 – (A $\cup$ B) $\cap$ (B $\cup$ C) $\cap$ (C $\cup$ A) = (A $\cap$ B) $\cup$ (B $\cap$ C) $\cup$ (C $\cap$ A).

3 – A Δ B = B Δ A.

4 – (A Δ B) Δ C = A Δ (B Δ C).

5 – A Δ B = $\emptyset$ $\Leftrightarrow$ A = B.

6 – A Δ C = B Δ C $\Leftrightarrow$ A = B